



(Cahiers Mathématiques de l'Université de Sherbrooke)

Titre : Sensibilité des coups au billard

Auteur(s) : Nicolas Bureau

Revue : CaMUS (Cahiers Mathématiques de l'Université de Sherbrooke)

Volume : 2

Année : 2012

Pages : 9-26

Éditeur : Université de Sherbrooke. Département de Mathématiques

URI : Repéré à : <http://camus.math.usherbrooke.ca/revue.html>

Page vide laissée intentionnellement

SENSIBILITÉ DES COUPS AU BILLARD

NICOLAS BUREAU

RÉSUMÉ. Le but de cette analyse est de quantifier la sensibilité d'un coup au billard. Pour une poche et une position de bille objet données, il existe une marge d'erreur, un angle, qui permet de réussir un coup. Cette quantité est très importante, car elle aide ensuite à déterminer une deuxième marge d'erreur : celle qui relie la bille blanche à la bille que l'on veut empocher. Cet angle est un reflet direct de la difficulté et de la sensibilité d'un coup. Ultimement, cette quantité est le cœur de cette recherche. Pour atteindre ce but, la géométrie vectorielle est l'outil d'excellence.

1. Introduction

Le billard est un jeu d'adresse, de précision et de stratégie. Débutant ou professionnel, lorsqu'il frappe la blanche dans le but d'empocher une autre bille, le joueur risque de perdre son tour à la moindre erreur. Pourquoi en est-il ainsi ? Peut-on déterminer une certaine marge d'erreur admissible qui permet de réussir un coup ? A priori, il est difficile de répondre à cette question, parce que beaucoup de facteurs peuvent amplifier les erreurs. De plus, la modélisation mathématique et physique d'un jeu de billard est une tâche complexe en soi. Un joueur de billard virtuel, comme celui de mon collègue Jean-François Landry [LDM11], a besoin de comprendre ce phénomène afin de minimiser ses erreurs et de maximiser ses chances de gagner un tournoi. Néanmoins, on peut toujours étudier un cas simple avec lequel on est particulièrement à l'aise.

L'objectif de cette étude est de considérer des coups de billard linéaires pour en analyser la sensibilité, c'est-à-dire la marge d'erreur. Certes, un coup linéaire simplifie de beaucoup la problématique, mais il permet quand même de dessiner un bon portrait d'un type de coup très commun au billard. De ce fait, l'aspect physique est mis de côté dans le but de faire une étude plutôt géométrique et quelque peu vectorielle.

L'idée est de commencer avec une poche de coin ou de bord et d'en extraire le plus d'information possible. Puis on y ajoute une bille et on détermine les différentes méthodes qui permettent d'empocher la bille avec la meilleure marge d'erreur possible. Bien entendu, cette erreur est quantifiable et donc calculable.

Le support majeur de Jean-Pierre Dussault ainsi que ses conseils judicieux ont été grandement appréciés. Merci également au CRSNG et, une fois de plus, à Jean-Pierre Dussault pour leur soutien financier pour ce stage en recherche.

Ensuite, on ajoute la blanche et on fait une analyse similaire : en fonction de la configuration des billes données, comment peut-on déterminer une marge d'erreur qui va permettre d'empocher la bille visée ? Toutes ces questions seront étudiées en temps et lieu, mais avant toute chose, on doit se fixer un modèle mathématique de la table.

2. Préliminaires

Il existe plusieurs types de tables de billard. Ici, on s'intéresse uniquement à une table de billard américain modélisée de la manière suivante :

- le coin supérieur droit est le point $(0,0)$ du plan cartésien ;
- les abscisses sont positives à gauche de l'origine et les ordonnées sont positives sous l'origine ;
- la longueur de la table est de L_o (sur les abscisses) et sa largeur est de L_a (sur les ordonnées) ;
- la poche supérieure droite (la première étudiée) est délimitée par les coordonnées $(h,0)$ et $(0,h)$;
- la poche supérieure centrale (la deuxième étudiée) est délimitée par les coordonnées $(M,0)$ et $(m,0)$;
- une bille a un rayon de r ;
- la position d'une bille est déterminée par son centre ;
- Les portions de la bande (J_1 , J_2 , J_3 et J_4), illustrées dans la Figure 1, se nomment *bandes intérieures des poches*.

De plus, pour rendre les équations plus lisibles, on utilisera souvent les constantes $z_c = r \cdot \cos(\pi - k)$, $z_s = r \cdot \sin(\pi - k)$, $w_c = r \cdot \cos(\pi - t)$ et $w_s = r \cdot \sin(\pi - t)$ dans ce document. La variable k représente l'angle entre le bord de la table et l'ouverture de la poche de coin, tandis que t est l'angle entre le bord et l'ouverture de la poche centrale.

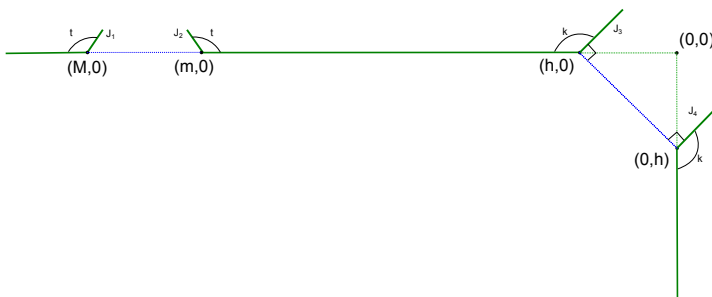


FIGURE 1. Poches de côté et de coin

3. Sensibilité de la balle objet

Cette section a pour but d'analyser la sensibilité de la balle objet à empocher. À partir d'une position donnée de la bille en question, on doit déterminer l'angle maximal pour empocher celle-ci. On commencera avec le cas d'une poche de coin, puis viendra l'analyse de la poche de côté.

3.1. Poche supérieure droite

L'analyse se fait en trois temps, car il existe trois régions de position de la bille qui nécessitent des équations différentes. Le diagramme suivant illustre ces emplacements :

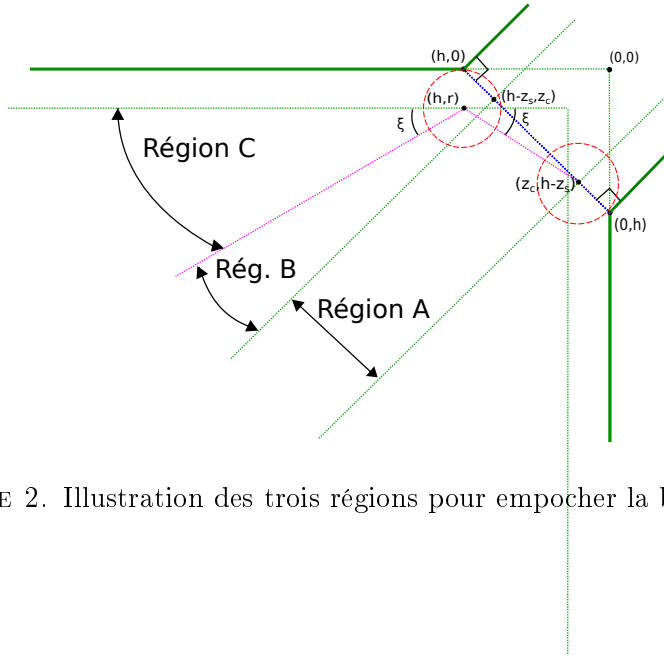


FIGURE 2. Illustration des trois régions pour empocher la balle objet

Seulement la moitié supérieure des régions est illustrée (et seulement cette moitié sera présentée), mais il est facile de s'imaginer, de façon symétrique, les régions pour la partie inférieure du dessin. La région A est celle dans laquelle une bille peut atteindre directement les deux bandes de l'intérieur de la poche. La région B est celle dans laquelle une bille peut atteindre une seule des bandes intérieures, mais pas l'autre. Ainsi, la trajectoire de la balle objet doit être tangente au coin de la poche. Finalement, la région C est celle qui permet l'utilisation de la bande pour améliorer la marge d'erreur.

Région A : Coup direct. Le coup direct est le cas le plus facile à calculer. Il faut d'abord trouver les positions limites atteignables près de la poche.

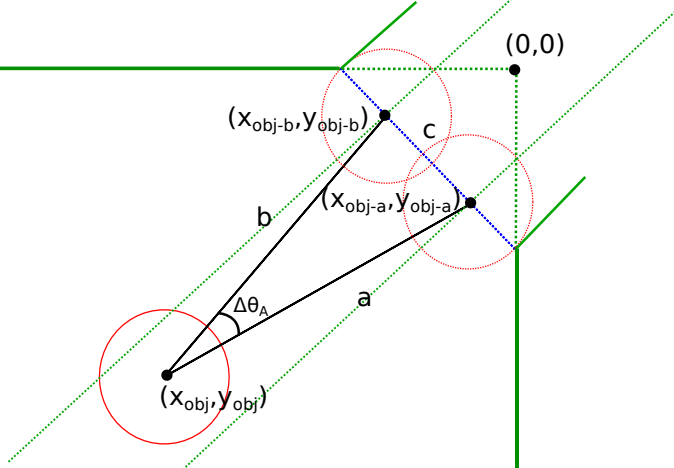


FIGURE 3. Illustration de la région A

On peut voir, dans la figure ci-haut, les bandes de la table en vert, la délimitation de la poche en bleu et les positions limites de la bille objet en rouge pointillé. Ces billes (dites fantômes) sont centrées à exactement un rayon des deux coins de l'intérieur de la poche. Ainsi, une distance de $c = \sqrt{2} \cdot (h - z_c - z_s)$ sépare ces deux billes.

Définissons le segment le plus à droite a et celui le plus à gauche b . La position de la bille objet est (x_{obj}, y_{obj}) . La position des billes fantômes sont respectivement $(x_{obj-b}, y_{obj-b}) = (h - z_s, z_c)$ et $(x_{obj-a}, y_{obj-a}) = (z_c, h - z_s)$. Ainsi, on peut calculer les valeurs suivantes :

$$b = \sqrt{(h - z_s - x_{obj})^2 + (z_c - y_{obj})^2}$$

$$a = \sqrt{(h - z_s - y_{obj})^2 + (z_c - x_{obj})^2}$$

Finalement, l'angle créé par l'intersection de a et b mesure :

$$\Delta\theta_A = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

La région A est délimitée pour deux droites imaginaires (d'une distance d'un rayon de bille) à la bande de l'intérieur de la poche. Ainsi cette région est définie par :

$$\begin{aligned} y &\geq \tan(180 - k) \cdot (x - h) + r \cdot \sec(180 - k) \\ y &\leq \cot(180 - k) \cdot x - r \cdot \csc(180 - k) + h \end{aligned}$$

Région C : Utilisation de la bande. Plus l'angle $\Delta\theta$ est grand, meilleures seront les chances de réussir un coup, il serait donc avantageux de trouver un moyen de l'améliorer. L'utilisation des bandes pour faire des rebonds pourrait aider à atteindre ce but. Toutefois, pour des raisons de simplification, on choisit pour hypothèse que, lors d'un rebond sur la bande, l'angle d'incidence correspond exactement à l'angle de réflexion.

Avant toute chose, il faudrait trouver une formule qui détermine la position à atteindre sur la bande pour empêcher la balle objet. L'image suivante montre l'emplacement pour empêcher la balle objet en utilisant la bande supérieure.

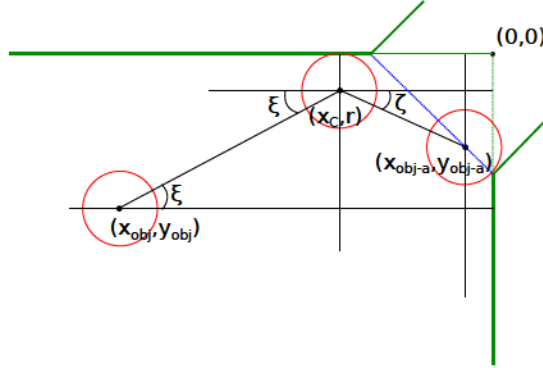


FIGURE 4. Empêcher la balle objet en utilisant la bande du haut

On déduit de ci-haut l'équation $\tan \zeta = \frac{y_{obj-a} - r}{x_C - x_{obj-a}} = \frac{h - z_s - r}{x_C - z_c}$, où x_C est la position recherchée sur l'axe des abscisses où la balle objet entre en collision avec la bande. On déduit également l'équation $\tan \xi = \frac{y_{obj} - r}{x_{obj} - x_C}$. Comme l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion, on obtient l'identité $\frac{y_{obj} - r}{x_{obj} - x_C} = \frac{h - z_s - r}{x_C - z_c}$, d'où on obtient la formule suivante :

$$x_C = \frac{x_{obj}(h - z_s - r) + z_c(y_{obj} - r)}{y_{obj} - 2r + h - z_s}$$

Une fois cette quantité trouvée, on peut s'intéresser au nouvel angle $\Delta\theta_C$ créé lors de l'utilisation de la bande. Il s'agit en fait de l'angle illustré ci-dessous :

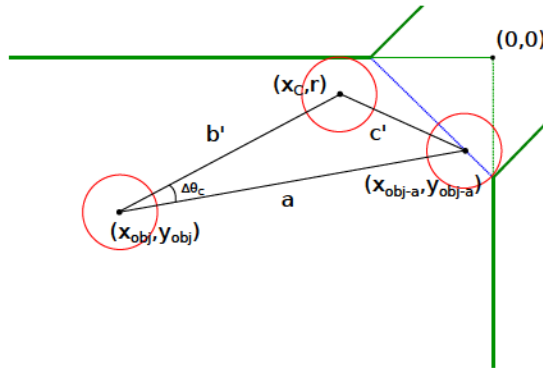


FIGURE 5. Nouvel angle créé par l'utilisation de la bande supérieure

La longueur a est celle que l'on retrouve dans la Figure 3. Il reste à déterminer les côtés b' et c' du triangle, puis l'angle $\Delta\theta_C$:

$$\begin{aligned} b' &= \sqrt{(x_{obj} - x_C)^2 + (y_{obj} - r)^2} \\ c' &= \sqrt{(x_C - x_{obj-a})^2 + (r - y_{obj-a})^2} \\ \Delta\theta_C &= \arccos\left(\frac{a^2 + b'^2 - c'^2}{2ab'}\right) \end{aligned}$$

Maintenant que l'on sait trouver la position de la collision avec les bandes et que l'on peut déterminer l'angle produit par cette méthode, on peut se poser la question : à quel moment est-il plus avantageux d'utiliser la bande ? Comme l'illustre la Figure 2, l'emplacement limite sur la bande pour lequel on peut faire un rebond dans le but d'empocher la bille se trouve à (h, r) . Sachant que le rebond se fait exactement à cet endroit, on veut également empocher la bille en faisant un deuxième rebond sur la bande de l'intérieur de la poche. On peut facilement vérifier que la position limite qui permet de le faire se trouve en $(z_c, h - z_s)$.

Pour trouver la droite qui délimite la région C, il faut trouver deux points qui passent par celle-ci. On connaît déjà le point (h, r) et comme on tient pour acquis que l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence, ceci veut dire que le graphique est symétrique en $x = h$, donc la droite passe par le point $(2h - z_c, h - z_s)$. On peut ainsi trouver l'équation $y = \left(\frac{h - z_s - r}{h - z_c}\right)(x - h) + r$. La région C est délimitée par la relation :

$$z_c \leq y \leq \left(\frac{h - z_s - r}{h - z_c}\right)(x - h) + r$$

Région B : Tangente au coin. Selon les limites des deux autres régions, on déduit que la région B est délimitée par la relation suivante :

$$\left(\frac{h - z_s - r}{h - z_c}\right)(x - h) + r \leq y \leq \tan(180 - k) \cdot (x - h) + r \cdot \sec(180 - k)$$

Dans cette région, l'angle pour réussir le coup sera maximal si la balle frôle le coin supérieur de la poche, comme dans l'illustration suivante :

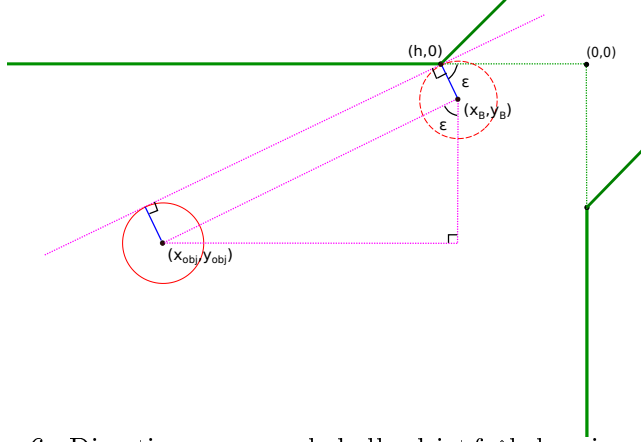


FIGURE 6. Direction pour que la balle objet frôle le coin supérieur de la poche

À première vue, on aurait tendance à vouloir déterminer les coordonnées (x_B, y_B) de la balle fantôme qui effleure le coin supérieur en $(h, 0)$, mais on peut se contenter de trouver ϵ , l'angle entre le rayon de la bille fantôme, qui est perpendiculaire à la tangente au coin, et l'axe des abscisses vers l'origine. On peut facilement déduire que cet angle est le même que l'angle supérieur du triangle formé par la balle objet et son fantôme, comme dans la figure précédente. On peut ainsi trouver les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned}\tan \epsilon &= \frac{y_B}{h - x_B} \\ \tan \epsilon &= \frac{x_{obj} - x_B}{y_{obj} - y_B}\end{aligned}$$

Or on peut aussi exprimer la coordonnée (x_B, y_B) en fonction de l'angle ϵ à partir de la position $(h, 0)$:

$$(x_B, y_B) = (h - r \cos \epsilon, r \sin \epsilon)$$

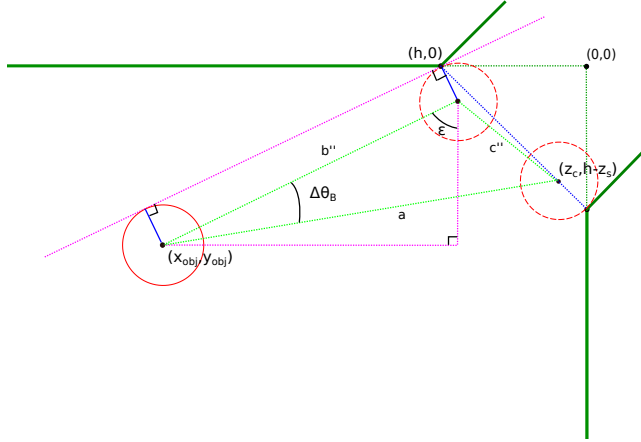
En comparant les deux autres équations précédentes et en utilisant cette dernière substitution, on trouve :

$$y_{obj} \sin \epsilon + (h - x_{obj}) \cos \epsilon = r$$

En utilisant la substitution $p = \tan \frac{\epsilon}{2}$, $\sin \epsilon = \frac{2p}{1+p^2}$ et $\cos \epsilon = \frac{1-p^2}{1+p^2}$, on peut isoler l'angle :

$$\epsilon = 2 \arctan \left(\frac{y_{obj} - \sqrt{(h - x_{obj})^2 + y_{obj}^2 - r^2}}{h - x_{obj} + r} \right)$$

Si l'on veut connaître la position de la balle fantôme au point (x_B, y_B) , il suffit de remplacer cet ϵ dans $(h - r \cos \epsilon, r \sin \epsilon)$. Il ne manque plus qu'à déterminer l'angle $\Delta\theta_B$ qui permet d'empocher la bille objet :

FIGURE 7. Angle $\Delta\theta_B$ en fonction des angles ϵ et ϵ'

On n'a qu'à déterminer la distance entre (x_B, y_B) et (x_{obj-a}, y_{obj-a}) ainsi que leur distance par rapport à la bille objet :

$$\begin{aligned}
 c'' &= \sqrt{(h - r \cdot \cos \epsilon - z_c)^2 + (r \cdot \sin \epsilon - h + z_s)^2} \\
 b'' &= \sqrt{(h - r \cdot \cos \epsilon - x_{obj})^2 + (r \cdot \sin \epsilon - y_{obj})^2} \\
 a &= \sqrt{(z_c - x_{obj})^2 + (h - z_s - y_{obj})^2} \\
 \Delta\theta_B &= \arccos \left(\frac{a^2 + b''^2 - c''^2}{2ab''} \right)
 \end{aligned}$$

Résumé. $\Delta\theta_{reg} = \arccos \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)$ avec $a = \|\vec{a}\|$, $b = \|\vec{b}\|$ et $c = \|\vec{c}\|$

reg	\vec{a}	\vec{b}	\vec{c}
Coup direct	$\begin{bmatrix} z_c - x_{obj} \\ h - z_s - y_{obj} \end{bmatrix}^t$	$\begin{bmatrix} h - z_s - x_{obj} \\ z_c - y_{obj} \end{bmatrix}^t$	$\vec{b} - \vec{a}$
Tangente au coin	$\begin{bmatrix} z_c - x_{obj} \\ h - z_s - y_{obj} \end{bmatrix}^t$	$\begin{bmatrix} h - r \cdot \cos \epsilon - x_{obj} \\ r \cdot \sin \epsilon - y_{obj} \end{bmatrix}^t$	$\vec{b} - \vec{a}$
Coup sur bande	$\begin{bmatrix} z_c - x_{obj} \\ h - z_s - y_{obj} \end{bmatrix}^t$	$\begin{bmatrix} x_C - x_{obj} \\ r - y_{obj} \end{bmatrix}^t$	$\vec{b} - \vec{a}$

On définit \vec{d}_{reg} , le vecteur pointant vers la direction du centre de l'angle $\Delta\theta_{reg}$, à partir du centre de la bille objet.

$$\vec{d}_{reg} = \frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b}$$

3.2. Poche supérieure centrale

L'étude pour une poche de côté est beaucoup plus complexe que celle pour une poche de coin. En effet, certains endroits sur la table rendent impossible un coup direct vers le trou, alors les bandes opposées doivent être utilisées. Un autre problème avec la poche de côté est que, même si la bille objet entre dans l'ouverture, il n'est pas garanti qu'elle soit empochée : elle peut aussi bien ressortir si elle

rebondit sur la bande intérieure. Dans le cadre de cette analyse, on va uniquement considérer les billes qui franchissent l'entrée de la poche. Tout comme pour les poches de coin, trois régions existent pour lesquelles des calculs différents doivent être effectués :

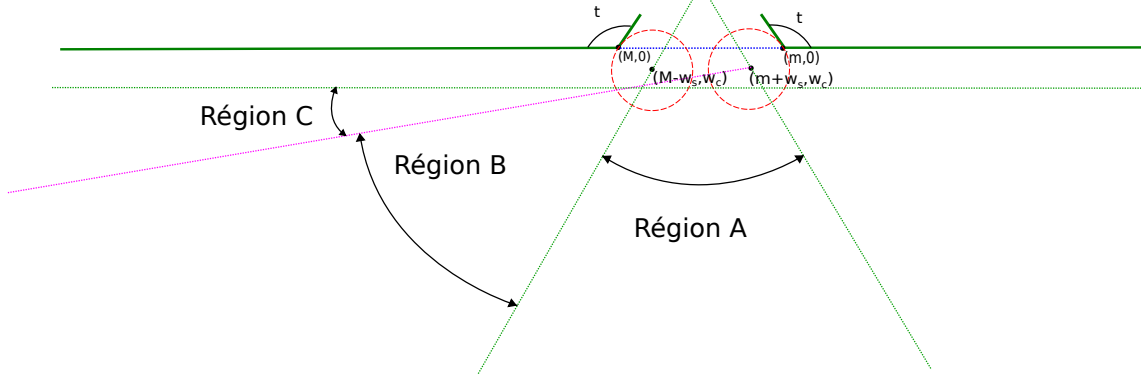


FIGURE 8. Illustration des trois régions autour d'une poche de côté

La région A correspond à l'endroit à partir duquel on peut atteindre les deux billes fantômes directement. La région B correspond à l'endroit à partir duquel on peut atteindre la deuxième bille fantôme, mais pas la première, parce que le coin de la poche l'empêche. Finalement, la région C correspond à l'endroit à partir duquel on ne peut atteindre aucune des deux billes fantômes et donc, on ne peut empocher de bille de façon directe. Il est à noter que les mêmes régions sont présentes à droite de la poche mais, les calculs étant symétriques, on ne les considère pas.

Région A : Coup direct. Dans la région A, la bille objet peut atteindre ses deux fantômes directement.

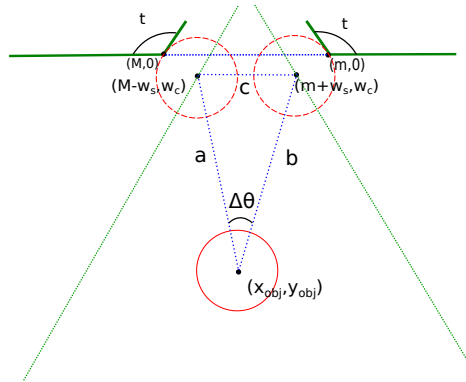


FIGURE 9. Bille objet dans la région A

La position des fantômes de la bille objet se trouve facilement. La première est à $(M - w_s, w_c)$ et la deuxième est à $(m + w_s, w_c)$. De plus, comme on connaît la position de la bille objet, on peut facilement trouver les distances a , b et c , puis appliquer la loi du cosinus :

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(x_{obj} - M + w_s)^2 + (y_{obj} - w_c)^2} \\ b &= \sqrt{(x_{obj} - m - w_s)^2 + (y_{obj} - w_c)^2} \\ c &= (M - m) - 2w_s \\ \Delta\theta_A &= \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \end{aligned}$$

Cette région est délimitée par les lignes pointillées, qui se trouvent à une distance d'un rayon du bord de l'intérieur de la poche (lignes vertes de la figure précédente). On sait que la première droite passe par le centre de la première bille fantôme (celle à gauche) et que la deuxième droite passe par le centre de la bille fantôme de droite. On en déduit que la première droite passe également par le point $(M, \frac{r}{\cos(180-t)})$ et que la deuxième passe par le point $(m, \frac{r}{\cos(180-t)})$. On peut ensuite montrer que ces droites sont respectivement définies par les équations $y = \tan(180-t) \cdot (x - M) + r \cdot \sec(180-t)$ et $y = -\tan(180-t) \cdot (x - m) + r \cdot \sec(180-t)$.

Ainsi, la région A est délimitée par les deux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} y &\geq \tan(180-t) \cdot (x - M) + r \cdot \sec(180-t) \\ y &\geq -\tan(180-t) \cdot (x - m) + r \cdot \sec(180-t) \end{aligned}$$

Région B : Tangente au coin. Lorsqu'une bille objet se trouve dans la région B, le coin gauche de la poche empêche la bille d'atteindre la première bille fantôme. Il faut donc que la trajectoire de la balle soit tangente au coin de la poche, comme dans la figure suivante.

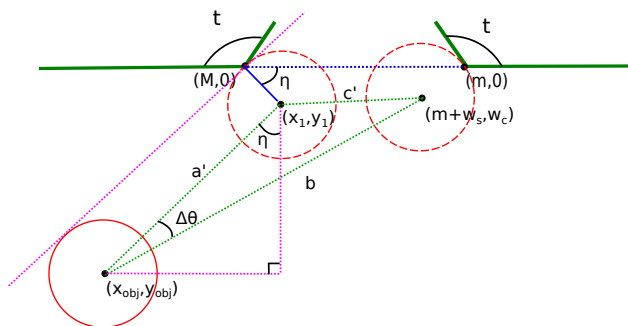


FIGURE 10. Illustration d'un coup typique de la région B

Il s'agit exactement des mêmes calculs que l'on a effectués dans la Section 3.1 :

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) &= (M - r \cdot \cos \eta, r \cdot \sin \eta) \\ \eta &= 2 \cdot \arctan \left(\frac{y_{obj} - \sqrt{(M - x_{obj})^2 + y_{obj}^2 - r^2}}{M - x_{obj} + r} \right)\end{aligned}$$

Afin de trouver $\Delta\theta$, on détermine la distance entre la bille objet et ses fantômes, puis la distance entre les deux fantômes :

$$\begin{aligned}a' &= \sqrt{(M - r \cdot \cos \eta - x_{obj})^2 + (r \cdot \sin \eta - y_{obj})^2} \\ b &= \sqrt{(m + w_s - x_{obj})^2 + (w_c - y_{obj})^2} \\ c' &= \sqrt{(M - r \cdot \cos \eta - m - w_s)^2 + (r \cdot \sin \eta - w_c)^2} \\ \Delta\theta_B &= \arccos \left(\frac{a'^2 + b^2 - c'^2}{2a'b} \right)\end{aligned}$$

Pour déterminer la limite de la région, on utilise la même technique. L'une des deux droites est nécessairement celle que l'on a trouvée pour la région A : $y = \tan(180 - t) \cdot (x - M) + r \cdot \sec(180 - t)$, l'autre est illustrée ci-bas (fuchsia) :

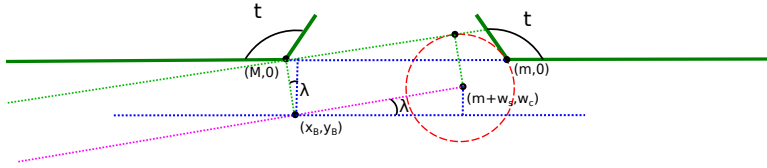


FIGURE 11. Illustration de la limite de la région B (droite fuchsia)

La coordonnée (x_B, y_B) est un point de la droite recherchée. On peut l'exprimer en fonction de λ , l'angle illustré.

$$(x_B, y_B) = (M - r \cdot \sin \lambda, r \cdot \cos \lambda)$$

De plus, on observe une autre identité avec ce même angle :

$$\tan \lambda = \frac{y_B - w_c}{x_B - m - w_s} = \frac{r \cdot \cos \lambda - w_c}{M - r \cdot \sin \lambda - m - w_s}$$

On peut ainsi trouver :

$$(M - m - w_s) \sin \lambda + w_c \cos \lambda = r$$

On peut isoler λ en posant $p = \tan \frac{\lambda}{2}$, $\sin \lambda = \frac{2p}{1+p^2}$ et $\cos \lambda = \frac{1-p^2}{1+p^2}$:

$$\lambda = 2 \arctan \left(\frac{(M - m - w_s) - \sqrt{w_c^2 + (M - m - w_s)^2 - r^2}}{w_c + r} \right)$$

Comme on sait que la droite limite passe par les points $(M - r \cdot \sin \lambda, r \cdot \cos \lambda)$ et $(m + w_s, w_c)$, on trouve aisément l'équation :

$$y = \left(\frac{r \cdot \cos \lambda - w_c}{M - m - r \cdot \sin \lambda - w_s} \right) \cdot (x - m - w_s) + w_c$$

On a donc les deux inéquations qui délimitent la région B :

$$\begin{aligned} y &\leq \tan(180 - t) \cdot (x - M) + r \cdot \sec(180 - t) \\ y &\geq \left(\frac{r \cdot \cos \lambda - w_c}{M - m - r \cdot \sin \lambda - w_s} \right) \cdot (x - m - w_s) + w_c \end{aligned}$$

Région C : Zone impossible. En regardant la Figure 8, on voit que si une bille se trouve dans la région C, alors elle ne peut atteindre ni l'une et ni l'autre des fantômes, même avec une direction qui coupe le coin de la poche. La seule façon d'empocher une telle bille serait de faire un rebond sur une autre bande (typiquement la bande opposée) ou sur une autre bille, mais ce problème ne sera pas étudiée dans le cadre de cette analyse.

Bien entendu, on a déjà déterminé l'équation qui délimite cette région dans la Section 3.2 :

$$w_c \leq y \leq \left(\frac{r \cdot \cos \lambda - w_c}{M - m - r \cdot \sin \lambda - w_s} \right) \cdot (x - m - w_s) + w_c$$

<i>Résumé.</i> $\Delta\theta_{reg} = \arccos\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$ avec $a = \ \vec{a}\ $, $b = \ \vec{b}\ $ et $c = \ \vec{c}\ $			
<i>reg</i>	\vec{a}	\vec{b}	\vec{c}
Coup direct	$\begin{bmatrix} M - w_s - x_{obj} \\ w_c - y_{obj} \end{bmatrix}^t$	$\begin{bmatrix} m + w_s - x_{obj} \\ w_c - y_{obj} \end{bmatrix}^t$	$\vec{b} - \vec{a}$
Tangente au coin	$\begin{bmatrix} M - r \cdot \cos \eta - x_{obj} \\ r \cdot \sin \eta - y_{obj} \end{bmatrix}^t$	$\begin{bmatrix} m + w_s - x_{obj} \\ w_c - y_{obj} \end{bmatrix}^t$	$\vec{b} - \vec{a}$

On définit \vec{d}_{reg} , le vecteur pointant vers la direction du centre de l'angle $\Delta\theta_{reg}$, à partir du centre de la bille objet.

$$\vec{d}_{reg} = \frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b}$$

4. La blanche

Cette section analyse la sensibilité d'un coup sur la blanche dans le but d'empocher une bille objet visée. Ultimement, le but est de déterminer l'angle $\Delta\varphi$, dit admissible, permettant de réussir un coup, en fonction de la position de la blanche, de la position de la bille objet et en fonction de l'angle maximal pour empocher cette dernière. Ce dernier angle correspond à $\Delta\theta$, calculé dans la section précédente, qui est en fonction de la position de la bille objet (et de la région dans laquelle elle se situe). En premier, on s'intéresse à un coup direct sans contrainte. En deuxième, on étudie un coup très coupé, puis on analyse les contraintes de la bande. Finalement, on analyse rapidement un coup de rebond

sur la bande, en supposant bien sûr que l'angle d'incidence correspond à l'angle de réflexion. Dans cette section, on choisit pour hypothèse que les collisions entre les billes ne sont pas inélastiques et qu'elles n'induisent aucun frottement.

4.1. Coup direct

Ce coup est le plus simple : l'angle $\Delta\theta$ forme un arc de cercle sur la bille et on peut directement atteindre tout point de cet arc à partir de la position de la blanche :

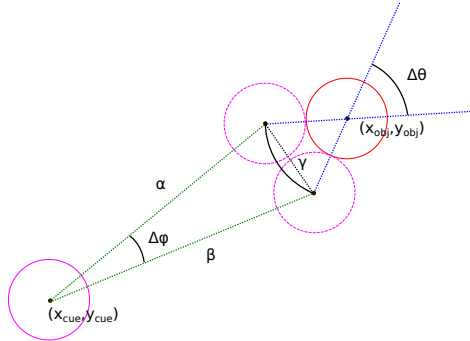


FIGURE 12. Disposition d'un coup direct

Le cercle rouge représente la bille objet en (x_{obj}, y_{obj}) , le cercle rose représente la blanche en (x_{cue}, y_{cue}) et les cercles pointillés correspondent aux endroits limites atteignables par la blanche pour réussir le coup (blanches fantômes). Les distances α et β se déterminent en fonction de la position de la blanche et de l'emplacement de ses fantômes. Les positions de ces balles imaginaires se trouvent toutes deux à une distance de $2r$ de la bille objet sur le long des vecteurs qui forment l'angle $\Delta\theta$. Ces vecteurs sont facilement déterminables sachant que, dans la section précédente, on a pu trouver la position des fantômes de la bille objet, peu importe la position (x_{obj}, y_{obj}) . Ainsi, dans le reste de cette section, on présuppose que l'on connaît les distances α et β .

L'angle recherché se trouve donc directement :

$$\Delta\varphi = \arccos \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$$

$$\gamma = 4r \sin \frac{\Delta\theta}{2}$$

4.2. Angle coupé

Il arrive parfois que l'arc de cercle produit par l'angle $\Delta\theta$ ne soit pas totalement accessible par la blanche.

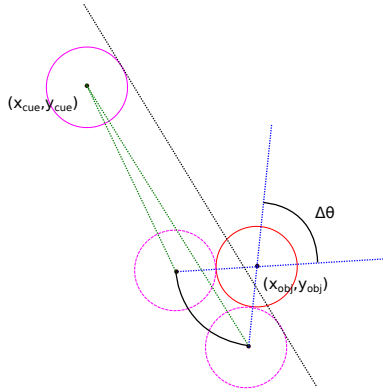


FIGURE 13. Arc de cercle qui ne peut pas être totalement accessible

La figure ci-haut montre que la fantôme du bas n'est physiquement pas atteignable par un coup linéaire de la blanche. En effet, la droite pointillée noire passe à travers la bille objet. Il faut donc déterminer l'endroit limite qui est accessible par l'intermédiaire de la blanche. Cette position est celle qui fait en sorte que la droite pointillée noire soit tangente à la blanche et à la bille objet :

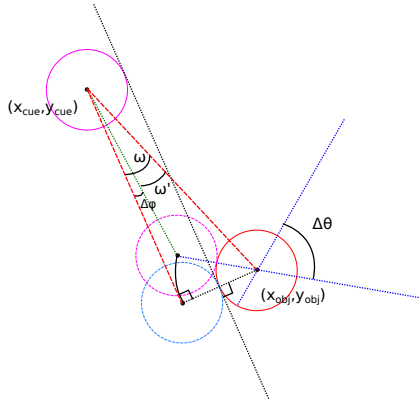


FIGURE 14. Correction de l'angle de tir

Dans cette figure, la bille bleue correspond à la position corrigée de la fantôme blanche. Cet emplacement est le meilleur possible pour que le coup soit exécutable. Pour déterminer $\Delta\varphi$, on n'a qu'à déterminer et soustraire les angles ω et ω' du dessin. On dénote $d = \sqrt{(x_{obj} - x_{cue})^2 + (y_{obj} - y_{cue})^2}$ la distance entre la blanche et la bille objet. On se souvient également que la distance entre la blanche et la fantôme de l'illustration (rose pointillé) est représentée par la variable α . Ainsi, on peut déterminer les angles recherchés :

$$\begin{aligned}
\omega &= \arcsin\left(\frac{2r}{d}\right) \\
\omega' &= \arccos\left(\frac{\alpha^2 + d^2 - 4r^2}{2\alpha d}\right) \\
\Delta\varphi &= \omega - \omega'
\end{aligned}$$

On peut maintenant s'intéresser à la région qui délimite l'utilisation de cet angle coupé. En fait, il suffit de vérifier si la distance entre la blanche et la position fantôme corrigée (cercle bleu sur l'illustration) est plus petite que la distance entre la blanche et son ancienne position fantôme (non présente dans la figure). De plus, si cette première distance est plus petite que la distance entre la blanche et sa deuxième position fantôme (rose pointillé de l'image), alors le coup direct est tout simplement impossible. En termes mathématiques, la région est délimitée par :

$$\alpha \leq \sqrt{d^2 - 4r^2} \leq \beta$$

Se pourrait-il que l'on doive corriger la position des deux positions fantômes ? Oui, mais il faudrait que l'angle $\Delta\theta$ soit très grand et que la blanche soit très près de la bille objet. Cette situation correspond à une bille objet à quelques millimètres de la poche, donc ce cas n'est pas intéressant.

4.3. Contrainte de bande

Si la position d'une des balles fantômes de la blanche est à moins d'un rayon de la bande, alors cet emplacement est inatteignable avec la blanche, il faut le corriger.

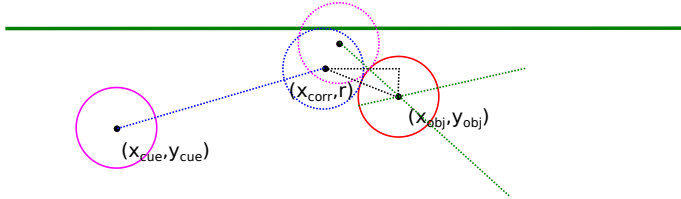


FIGURE 15. Balle fantôme contrainte par la bande

On cherche la position de la bille fantôme en bleu et on obtient :

$$(x_{corr}, y_{corr}) = \left(x_{obj} + \sqrt{4r^2 - (y_{obj} - r)^2}, r \right)$$

On peut aisément déterminer α' , la distance entre cette position et la blanche, qui remplace la distance α de la Section 3.1. Ensuite, on peut calculer γ' , la distance entre cette position et celle de l'autre bille fantôme, afin de remplacer la quantité γ . Maintenant que l'on connaît α' , β et γ' , les dimensions du triangle

formé par la blanche et ses deux fantômes (dont l'une est corrigée), on peut utiliser la loi du cosinus pour déterminer l'angle de coup :

$$\Delta\varphi = \arccos \frac{\alpha'^2 + \beta^2 - \gamma'^2}{2\alpha'\beta}$$

Si on tombe sur un cas où la bande restreint l'angle de tir et qu'en plus la blanche se trouve dans la région décrite à la fin de la section précédente, alors on peut tout simplement calculer le $\Delta\varphi$ associé à chacun et choisir le plus petit des deux.

4.4. Rebond sur la bande

L'utilisation de la bande avec un coup de blanche est souvent à éviter. En effet, l'angle $\Delta\varphi$ produit par un coup direct est généralement plus grand que celui formé par le rebond avec la bande. Néanmoins, il peut arriver que la collision avec le rebord de la table soit obligatoire, surtout si le coup direct est bloqué par des obstacles. Pour une position de bille fantôme (x_f, y_f) donnée et en se servant des calculs faits dans la Section 3.1, on obtient directement la position sur la bande :

$$(x_{\text{bande}}, y_{\text{bande}}) = \left(\frac{x_{\text{obj}}(y_f - r) + x_f(y_{\text{obj}} - r)}{y_{\text{obj}} + y_f - 2r}, r \right)$$

On n'a qu'à faire ce calcul deux fois (une fois par bille fantôme), puis on peut obtenir les dimensions du triangle formé par la blanche et ses deux fantômes de bande, puis utiliser la loi du cosinus pour déterminer $\Delta\varphi$.

4.5. Combines

Si l'on veut calculer le $\Delta\varphi$ résultant d'une combine, la technique est alors simple :

- À l'aide de la Section 3, on détermine l'angle $\Delta\theta$.
- On calcule les positions fantômes adjacentes à la bille objet.
- On utilise l'analyse de la Section 4, mais en remplaçant la blanche par une seconde bille objet, afin de trouver un certain angle $\Delta\theta_2$ (qui correspond au $\Delta\varphi$ de l'analyse).
- On calcule les positions fantômes adjacentes à la nouvelle bille objet.
- On utilise l'analyse de la Section 4 à nouveau, pour trouver l'angle $\Delta\varphi$.

Il est évident qu'en modélisant une combine, le marge d'erreur $\Delta\varphi$ va être considérablement diminuée.

4.6. Remarque sur $\Delta\varphi$

Il est intéressant de noter que si la blanche est frappée dans la direction centrale de l'angle $\Delta\varphi$, alors, en général, après la collision avec la bille objet, cette dernière ne va pas rouler dans la direction du centre de l'angle $\Delta\theta$. De plus, comme indiqué dans la section suivante, le centre de l'angle $\Delta\varphi$ représente probablement la meilleure direction de coup. Ainsi, comme le milieu de la marge d'erreur de la blanche ne correspond pas nécessairement au milieu de la marge d'erreur de la bille objet, il n'est pas nécessairement avantageux de frapper la blanche dans le but de faire rouler l'autre bille vers le centre de l'entrée de la poche. Il s'agit, certes, d'une déduction simple de cette analyse, mais tout de même très importante à retenir lors d'un match de billard.

Résumé. $\Delta\varphi_{reg} = \arccos\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}\right)$ avec $\alpha = \|\vec{\alpha}\|$, $\beta = \|\vec{\beta}\|$ et $\gamma = \|\vec{\gamma}\|$
 Posons $\vec{v} = [x_{obj} - x_{cue}; y_{obj} - y_{cue}]$ avec $v = \|\vec{v}\|$ et $\mu = \frac{y_{obj} - y_{cue}}{x_{obj} - x_{cue}} - \tan\omega$

<i>reg</i>	$\vec{\alpha}$	$\vec{\beta}$	$\vec{\gamma}$
Coup direct	$\vec{v} - 2r \cdot \frac{\vec{a}}{a}$	$\vec{v} - 2r \cdot \frac{\vec{b}}{b}$	$\vec{\beta} - \vec{\alpha}$
Angle coupé	$\vec{v} - 2r \cdot \frac{\vec{a}}{a}$	$\left[\begin{array}{c} \sqrt{\frac{v^2 - 4r^2}{1 + \mu^2}} \\ \mu \sqrt{\frac{v^2 - 4r^2}{1 + \mu^2}} \end{array} \right]^t$	$\vec{\beta} - \vec{\alpha}$
Contrainte de bande	$\vec{v} + \left[\begin{array}{c} \sqrt{4r^2 - (y_{obj} - r)^2} \\ r - y_{obj} \end{array} \right]^t$	$\vec{v} - 2r \cdot \frac{\vec{b}}{b}$	$\vec{\beta} - \vec{\alpha}$

On définit $\vec{\delta}_{reg}$, le vecteur pointant vers la direction du centre de l'angle $\Delta\varphi_{reg}$, à partir du centre de la blanche.

$$\vec{\delta}_{reg} = \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} + \frac{\vec{\beta}}{\beta}$$

5. Probabilités

Une fois l'angle de marge d'erreur ($\Delta\varphi$) pour la blanche calculé, on peut s'intéresser à déterminer comment maximiser nos chances de réussir un coup. On peut déduire, de l'analyse précédente, qu'il serait plus avantageux de frapper au centre de l'angle $\Delta\varphi$. En effet, cette stratégie laisse une marge d'erreur égale à gauche et à droite de la direction du coup. Cette erreur est difficilement modélisable, mais la loi probabiliste la plus logique à utiliser serait la loi gaussienne (normale). Le paramètre de moyenne est évidemment nul, car on veut qu'en moyenne, un joueur frappe dans la direction centrale de la marge d'erreur. Le paramètre de variance est par contre plus difficile à déterminer. Il indique à quel point, en moyenne, le joueur a tendance à s'éloigner de la moyenne. La seule façon d'approximer cette variable est avec un assez grand échantillon de coups.

$$\Phi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

$$\mathbb{P}\left(-\frac{\Delta\varphi}{2} \leq \Phi \leq \frac{\Delta\varphi}{2}\right) = erf\left(\frac{\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\sqrt{2} \cdot \sigma}\right)$$

Dans la dernière équation, $erf\left(\frac{a}{\sqrt{2} \cdot \sigma}\right)$ est la fonction erreur qui calcule la probabilité qu'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ se retrouve entre $-a$ et a .

6. Conclusion

Bien que cet article fasse une analyse détaillée de la sensibilité des coups au billard, beaucoup de travail reste à faire. En effet, au début du document, beaucoup de facteurs ont été mis de côtés et beaucoup d'hypothèses ont été faites tout au long de l'article. Les rebonds sur les bandes, par exemple, ont été étudiés en tenant pour acquis que l'angle d'incidence était égal à l'angle

de réflexion, ce qui n'est pas le cas, en général. De plus, seuls les coups ayant des trajectoires linéaires ont été pris en compte, alors qu'en réalité les billes peuvent avoir des trajectoires curvilignes. Il est clair qu'en introduisant ce genre de coups, les marges d'erreur calculées vont être augmentées. En effet, si certains obstacles rendent impossible un coup en ligne droite, une trajectoire curviligne peut permettre de les contourner.

Les trajectoires curvilignes (lors du glissement de la bille) sont décrites par des équations [LG06, Mar95] qui dépendent du temps t :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r_0 + \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \left[v_0 t - \frac{1}{2} \mu_s g \cdot t^2 \hat{u}_{0x} - \frac{1}{2} \mu_s g \cdot t^2 \hat{u}_{0y} \right]$$

où r_0 est la position initiale d'une bille sur la table, ϕ est l'angle de direction du coup par rapport à l'axe des abscisses, v_0 est la vitesse initiale dans le sens du coup, μ_s est le coefficient de friction du tapis, g est l'accélération gravitationnelle et \hat{u}_0 est le vecteur de vitesse relative initiale au point de contact de la bille avec la table. Après un certain temps t^* , la bille commence à rouler et sa trajectoire devient linéaire.

Une étude intéressante serait d'analyser une fois de plus la sensibilité des coups, mais en mettant en évidence les trajectoires curvilignes. Ainsi, on pourrait déterminer les marges d'erreur non seulement avec la position des billes sur la table, mais aussi avec un vecteur de données initiales du coup $[a, b, \phi, \theta, v_0]$ (coordonnées de contact queue-blanche, direction du coup, angle vertical du coup et vitesse initiale).

Références

- [Alc04] D.G. Alciatore. *The Illustrated Principles of Pool and Billiards*. Sterling, 2004.
- [LDM11] Jean-François Landry, Jean-Pierre Dussault, and Philippe Mahey. Billiards : an optimization challenge. In *Proceedings of The Fourth International C* Conference on Computer Science and Software Engineering*, C3S2E '11, pages 129–132, New York, NY, USA, 2011. ACM.
- [LG06] Will Leckie and Michael Greenspan. An event-based pool physics simulator. In H. van den Herik, Shun-Chin Hsu, Tsan-sheng Hsu, and H. Donkers, editors, *Advances in Computer Games*, volume 4250 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 247–262. Springer Berlin / Heidelberg, 2006.
- [Mar95] W.C. Marlow. *The physics of pocket billiards*. MAST, 1995.

NICOLAS BUREAU, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
 Courriel: Nicolas.Bureau@USherbrooke.ca